

Info : $\diamond$ Dernier délai pour l'inscription à l'examen blanc vendredi! (Δ connexion avec adresse epfl nécessaire)

Rappel :

Remarque 2.10 : $\circ \leq, \geq, = \leadsto$ fermé | souvent!
 $\circ <, >, \neq \leadsto$ ouvert $\hookrightarrow$ quand?

$\diamond f$ est continue en $\tilde{x}$ si $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$)

limite
d'Analyse II $\Rightarrow$

- test des directions
- Critère
- Carac. des limites de fonction par courbes/suites

Remarque 4.2

En utilisant le théorème 3.4, on a que $f = (f_1, \dots, f_m)$ est continue en $\tilde{x}$ si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq m$, f_i est continue en $\tilde{x}$.

Proposition 4.3 (Prop. alg. de la continuité)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in D$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ continues en $\tilde{x}$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $h: E \rightarrow \mathbb{R}^l$ continue en $f(\tilde{x})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

(i) $\|f\|$ est continue en $\tilde{x}$.

(ii) $(\alpha f + \beta g)$ est continue en $\tilde{x}$.

(iii) $\langle f, g \rangle$ est continue en $\tilde{x}$.

(iv) $d(f, g)$ est continue en $\tilde{x}$.

(v) Si $m=1$, $f \cdot g$ est continue en $\tilde{x}$.

(vi) Si $m=1$, et $g(\tilde{x}) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en $\tilde{x}$.

(vii) $h \circ f$ est continue en $\tilde{x}$.

(viii) $\forall 1 \leq i \leq n$ $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\pi_i(x) = x_i$ est continue.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

$$\frac{\sin(x+y^2)}{|x|+y^2}$$

$\rightarrow 1$

$m=1$

Proposition 4.4 Caractérisation topologique des fonctions continues

Soit $f: \underline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) f est continue sur $\mathbb{R}^n$.
- (ii) $\forall O \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $f^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in O\}$ est ouvert
- (iii) $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ fermé, $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in F\}$ est fermé

Remarque 4.5 :

Cette caractérisation justifie la remarque 2.10. Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors,

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in]a, +\infty[\} \\ &= f^{-1}(\underbrace{]a, +\infty[}_{\text{ouvert}}) \quad \text{ouvert.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in [a, +\infty[\} \\ &= f^{-1}(\underbrace{[a, +\infty[}_{\text{fermé}}) \quad \text{fermé.}\end{aligned}$$

→ voir polycopié p. 82 pour les autres

⚠ f doit être continue sur $\mathbb{R}^n$.

Série 8, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, y \geq \frac{1}{(x^2 - 1)^2}\}$ → fermé

§4.2 Dérivées partielles et fonctions diff évenables. (fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

Définition 4.6 (Dérivée partielle, dérivée directionnelle, gradient)
Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $\tilde{x}$.
 $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$

(i) Pour $1 \leq i \leq n$, la dérivée partielle de f par rapport à x_i est la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i + t, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)}{t}$$

si elle existe. On la note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x})$

(ii) Pour $v \in \mathbb{R}^n$ tq $\|v\| = 1$. On définit la dérivée directionnelle de f suivant v en $\tilde{x}$ par

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{x} + t \cdot v) - f(\tilde{x})}{t}$$

si elle existe. On la note alors, $\frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x})$

(iii) Si toutes les dérivées partielles de f existent en $\tilde{x}$, on définit le gradient de f en $\tilde{x}$, noté $\nabla f(\tilde{x})$

$$\text{par } \nabla f(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x}) \right)$$

Remarque 4.7 : (i) si e^i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0)$$

$i^{\text{ème}}$ composante.

Alors,
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(\tilde{x})$$

(ii) Le fait que les dérivées partielles existent $\nRightarrow f$ est continue (dérivée partielles, directions rectilignes le long des axes / dérivée directionnelle, directions rectilignes $\rightarrow$ dynamique test des directions, le critère manque.)

$$(iii) \quad \text{si } \varphi(t) = f(\tilde{x} + t \cdot v),$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}) = \varphi'(0).$$

Exemples 4.8 : (i) $f(x, y) = 2 + x - 3y + 5xy + x^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 5y + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3 + 5x$$

y paramètre
dérivée
par rapport à x

x paramètre
dérivée par rapport à y .

(ii) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pour quels $v \in \mathbb{R}^n$ tq $\|v\|=1$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existe ? ($v=(v_1, v_2)$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t \cdot v_1, 0+t v_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t v_1, t v_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t v_1 \cdot t v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} - 0}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot v_1 \cdot v_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } v_1=0 \text{ ou } v_2=0 \\ \text{n'existe pas} & \text{sinon.} \end{cases} \\ &\quad v_1^2 + v_2^2 = \|v\|^2 = 1^2 = 1\end{aligned}$$

Or, les seuls vecteurs de longueur 1 qui vérifient $v_1=0$ ou $v_2=0$ sont $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$

En particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0) = 0 \quad \text{existe \&}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0) = 0 \quad \text{existe aussi}$$

(iii) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pour quels $v \in \mathbb{R}^n$ tq $\|v\|=1$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$

existe? ($v = (v_1, v_2)$)

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t \cdot v_1, 0+t \cdot v_2) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^2} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

et donc, la dérivée directionnelle existe quelle que soit la direction.

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0) = \frac{0^2}{1} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0) = 0$$

Proposition 4.9 (Propriétés algébriques de $\frac{\partial}{\partial x_i}$)
 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ tq les
 dérivées partielles de f et g par rapport à x_i existent en $\tilde{x}$

Alors,

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} [\alpha f + \beta g](\tilde{x}) = \frac{\partial (\alpha f + \beta g)}{\partial x_i}(\tilde{x}) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x}).$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} [f \cdot g](\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) \cdot g(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x})$$

$$(iii) \quad \text{si } g(\tilde{x}) \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{f}{g} \right](\tilde{x}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x})}{g(\tilde{x})^2}$$

Notation 4.10 Dérivées d'ordre supérieur

On écrit les dérivées partielles d'ordre 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}(x) \quad \left(\text{On dérive par rapport à } x_j \text{ puis } x_i \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_i}(x) .$$

les dérivées partielles d'ordre 3

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)}{\partial x_i}$$

(dérivée partielle par rapport à x_k , puis x_j , puis x_i)

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(x) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} [f] \right] \right]$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On aimerait calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ & $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$

Pour $(x, y) \neq (0, 0) \leadsto$ règles de dérivation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

et pour $(x, y) = (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t(0^4 - 4 \cdot 0^2 \cdot t^2 - t^4)}{(0^2 + t^2)^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -1 = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1.$$

En particulier ici, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$

Définition 4.12 (Différentiable)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Si $\tilde{x} \in D$ et f est définie au voisinage de $\tilde{x}$ et toutes les dérivées partielles de f existent en $\tilde{x}$, on dit que f est différentiable en $\tilde{x}$ si

$$\lim_{h \rightarrow (0, \dots, 0)}$$